Exercício 29 (capítulo 3 do livro): Seja X uma variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 1/2, & 1 < x < 2 \end{cases}.$$

(a) Calcule a média e a variância de X.

Solução: A média de X é por definição dada por

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 \frac{x}{2} dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = \frac{13}{12}. \end{aligned}$$

Por sua vez a variância de X pode ser calculada da seguinte forma:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Uma vez que,

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 \frac{x^2}{2} dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{6}\right]_1^2 = \frac{17}{12}, \end{aligned}$$

pode concluir-se que

$$Var(X) = \frac{17}{12} - \left(\frac{13}{12}\right)^2 = \frac{35}{144}.$$

(b) Utilizando as propriedades do valor esperado, obtenha a média e a variância da variável aleatória $Y = 4X - 2$.

Solução: Sendo o valor esperado um operador linear, temos que

$$E(Y) = E(4X - 2) = 4E(X) - 2 = 4 \times \frac{13}{12} - 2 = \frac{7}{3}.$$

De forma semelhante, podemos verificar que

$$E(Y^2) = 16E(X^2) - 16E(X) + 4 = \frac{28}{3}.$$

Consequentemente,

$$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{28}{3} - \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{35}{9}.$$

c) Cálcule a média das seguintes variáveis aleatórias:

$$Z = \frac{1}{X}; \quad U = \begin{cases} -1, & X < 0.5 \\ 1, & X \geq 0.5 \end{cases}.$$

Solução: Tendo em conta a definição de valor esperado para funções de uma variável aleatória, temos que

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} f_X(x)dx = \int_0^1 1dx + \int_1^2 \frac{1}{2x}dx \\ &= 1 + \left[\frac{ln(x)}{2}\right]_1^2 = 1 + \frac{ln(2)}{2} \approx 1.3466 \\ E(U) &= \int_{-\infty}^{0.5} -1 \times f_X(x)dx + \int_{0.5}^{+\infty} 1 \times f_X(x)dx \\ &= \int_0^{0.5} -xdx + \int_{0.5}^1 xdx + \int_1^2 \frac{1}{2}dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2}\right]_0^{0.5} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0.5}^1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(d) Determine os 1^o e o 3^o quartis da variável aleatória X.

Solução: Os 1^o e o 3^o quartis da variável aleatória X são respetivamente os valores $q_{0.25}$ and $q_{0.75}$ tal que

$$F_X(q_{0.25}) = 0.25 \quad \text{e} \quad F_X(q_{0.75}) = 0.75.$$

Uma vez que,

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(u)du = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{2}, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}.$$

Concluímos que,

$$F_X(q_{0.25}) = 0.25 \Leftrightarrow q_{0.25} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{and} \quad F_X(q_{0.75}) = 0.75 \Leftrightarrow q_{0.25} = \frac{3}{2}.$$